*Durée : 1 heure. Aucun document autorisé. Ce contrôle sera noté sur **10 points**.*

1. (2 pts) Questions de cours :

a) Rappelez la comparaison séries-intégrales, puis montrez la divergence de la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

b) Rappelez pourquoi si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions bornées sur un intervalle I qui converge uniformément vers f, alors f est bornée sur I.

2. (3 pts) Déterminer la nature des suites de nombres suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\ln(n)^2}$.

b) $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$. (Indication : comparaison avec une série de Riemann.)

c) $\sum_{n\geq 2} ne^{-n^2+n}$.

3. (2 pt) Déterminez si la **suite** de fonctions $f_n(x) = nxe^{-nx}$ converge uniformément sur $I = [1/10, +\infty[$, respectivement sur $I = [0, +\infty[$.

4. (3 pts) Vrai ou faux : jusitifiez si l'énoncé est vrai, donnez-en un contre-exemple s'il est faux.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série de nombres.

a) Si elle converge, alors $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ dès que la limite existe.

b) Si elle converge, alors $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ converge. (Indicaiton : séries altérnées.)

c) Si elle diverge et si $a_n \geq 0$, alors $a_n \not\to 0,\ n \to +\infty$.

Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une **suite** de fonctions.

d) Si f_n converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ et si $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$, alors la convergence $f_n \to f$ est uniforme sur $[0,1]$. (Indication : on peut supposer $f = 0$.) [1]

e) Si $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_{n+1} \leq f_n$, alors f_n converge simplement.

f) Si $0 \leq f_n \leq 1$ et $f_{n+1} \leq f_n$, alors f_n converge uniformément.

5. (3 pts) Considérons la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrez que si $x \in]-1, 1]$, la série converge.

b) Montrez que la série converge uniformément sur $[-a, a]$ si $0 < a < 1$.

Les trois questions suivantes sont étroitement reliées :

c) Écrivez le critère de Cauchy pour la convergence uniforme de la série (i.e. pour la convergence uniforme de la suite des sommes partielles de la série) sur $]-1, 0]$.

d) Qu'obtenez vous lorsque $x \to (-1)^+$? (Ceci devrait correspondre au critère de Cauchy pour une série de nombres que vous préciserez.)

e) En déduisez que la convergence de la série n'est pas uniforme sur $]-1, 0]$. [2]

Fin du sujet.

1. Si on suppose de plus que $f_{n+1} \leq f_n$, alors la convergence $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ est automatique par le théorème de convergence dominée, et f_n converge uniformément par le théorème de Dini.
2. La convergence sur $[0,1]$ est pourtant uniforme (Théorème d'Abel radial).